Université Claude Bernard Lyon 1

DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT

(Arrêté du 25 mai 2016)

Date de la soutenance : **09 juillet 2024**

Nom de famille et prénom de l’auteur : **Monsieur ALLASIA Julien**

Titre de la thèse : *« Marches aléatoires en milieu aléatoire avec conditions de mélange dynamique »*

Résumé

Dans les années 1960, la recherche sur les marches aléatoires en milieu aléatoire (MAMA) a débuté avec
un modèle unidimensionnel visant à étudier la réplication de l’ADN ([Che67]). Ce modèle a ensuite
trouvé d’autres applications dans des domaines tels que la métallurgie ([Tem72]), la biologie ([CM07])
et la physique ([LDMF99], [Hug96]). Ce modèle consistait à définir une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ dont
les matrices de transition étaient déterminées par un autre processus aléatoire. Les comportements
asymptotiques de ces marches ont été classifiés avec succès dans [Sol75] sous des hypothèses d’ergodicité.
Depuis lors, le modèle a été généralisé à $\mathbb{Z}^d$ et à des environnements dynamiques, c’est-à-dire évoluant
également dans le temps, attirant l’attention de la communauté mathématique en raison de sa grande
complexité. Obtenir des résultats aussi simples que les lois des grands nombres peut être difficile, et des

hypothèses solides sont généralement nécessaires. Alors que la plupart des résultats asymptotiques qui ont été démontrés jusqu'à présent concernent des environnements i.i.d., [BHT20] démontre une loi des grands nombres dans le cadre dynamique unidimensionnel en ne supposant qu'une propriété de mélange polynomial non uniforme de l'environnement, grâce à des techniques de renormalisation. Ce modèle constitue le point de départ de notre travail.

Soit $\omega = (\omega_y)_{y\in\mathbb{Z}^{d+1}}$ un processus aléatoire avec un ensemble d'états S (la loi de ω sera toujours supposée invariante par translation). ω est appelé milieu aléatoire ou environnement aléatoire. Soit $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{Z}^{d+1}$ et $p : S \times \mathbb{V} \to [0, 1]$ tel que $p(s, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{V}$ pour tout $s \in S$. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov satisfaisant, pour $y \in \mathbb{Z}^{d+1}$ et $z \in \mathbb{V}$,

$$P_\omega(Z_{n+1} = y + z | Z_n = y) = p(\omega_y, z).$$

On dit que Z est une marche aléatoire en milieu aléatoire, avec sauts dans $\mathbb{V}$. On dit qu'on est dans un cadre dynamique dans le cas particulier où $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{Z}^d \times \{1\}$. La $(d + 1)^e$ coordonnée de la marche est alors alignée sur le temps, et Z_n peut se réécrire comme $(X_n, N_0 + n)$, où (X_n) est un processus à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, qu'on peut voir comme une marche aléatoire en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ mais avec un environnement dynamique, c'est-à-dire qui évolue dans le temps. Ces deux points de vue sont équivalents, mais celui que nous proposons a l'intérêt de donner un cadre commun aux milieux statique et dynamique.

A la suite de [BHT20], notre travail se concentre beaucoup sur les milieux dynamiques. Cependant, nous adaptons aussi nos outils à des milieux statiques satisfaisant des hypothèses de ballisticité dans une direction, laquelle est alors vue comme l'équivalent du temps du cadre dynamique.

Commençons donc par présenter les outils développés dans [BHT20]. Leur travail concerne le temps continu, mais une directe adaptation de leurs outils permet de démontrer une loi des grands nombres pour la marche aléatoire aux plus proches voisins en milieu aléatoire dynamique sur $\mathbb{Z}$ (autrement dit, ici $\mathbb{V} = \{-1, 1\} \times \{1\}$). La force de leur travail réside dans le fait que la collection d'environnements auxquels les résultats s'appliquent est très large, car ils requièrent essentiellement un mélange polynomial, alors que par le passé la plupart des résultats exigeaient des hypothèses plus fortes, comme le fait que l'environnement est i.i.d., ou au moins qu'il vérifie une propriété de mélange uniforme.

Dans [BHT20], l'hypothèse de mélange qui est faite peut être résumée de la manière suivante : la covariance de l'environnement restreint à deux boîtes de $\mathbb{Z}^2$ de tailles linéaires en H et séparées verticalement (c'està-dire temporellement) de H décroît comme $H^{-\alpha}$ pour un certain $\alpha > 0$. Cette hypothèse est utilisée à travers une méthode de renormalisation multi-échelles, qui permet de trouver une borne qui décroît de façon polynomiale pour des familles d'événements $(A_H)_{H\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles on peut trouver une sous-suite $(A_{H_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (les (H_k) sont alors appelés échelles de la renormalisation) satisfaisant deux conditions :

- Il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ assez grand tel que la probabilité de $A_{H_{k_0}}$ peut être majorée de façon adéquate;
- Sur $A_{H_{k+1}}$, deux événements de probabilité égales à celle de A_{H_k} se produisent dans deux boîtes de tailles linéaires en H_k et séparées temporellement de H_k, de sorte qu'on peut utiliser l'hypothèse de mélange sur ces deux événements.

Le résultat principal qui découle de [BHT20] est une loi des grands nombres pour la marche aléatoire aux plus proches voisins dans un tel environnement. On pose $Z = Z_o$ la MAMA partant de $Z_0 = (0, 0)$. Ainsi Z_n peut se réécrire comme $Z_n = (X_n, n)$.

1

Theorem 0.1. *Il existe $v \in [-1, 1]$ tel que presque sûrement, $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} v$. De plus, on a un taux de convergence polynomial :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - v\right| \geqslant \varepsilon\right)$$

$$\leqslant c\, n^{-\alpha/4}.$$

L’idée est de prouver l’estimation polynomiale avant de déduire la convergence presque sûre en utilisant le lemme de Borel-Cantelli. La preuve de cette estimation se divise en deux parties. La première consiste à introduire deux vitesses limites v_- et v_+, qui bornent d’une certaine manière le comportement asymptotique de X. Grosso modo, elles vérifient les deux propriétés suivantes :

- La marche a souvent une vitesse moyenne X_n/n proche de v_- et de v_+.
- La probabilité que la marche aléatoire ait une vitesse moyenne inférieure à v_- ou supérieure à v_+ tend vers 0 lorsque n tend vers l’infini, à un taux similaire à celui de l’estimation à démontrer.

Cela est fait en utilisant de la renormalisation. La deuxième partie de la preuve consiste à montrer que $v_- = v_+$, ce qui donne la vitesse limite $v = v_- = v_+$ recherchée.

Cette deuxième partie requiert une fine analyse des trajectoires. Au-delà de la renormalisation, l’outil fondamental développé dans [BHT20] est une notion de piège qui repose sur un couplage adéquat des marches aléatoires partant de points différents de l’espace-temps. L’idée est que l’aléa nécessaire pour les sauts des marches aléatoires est attribué aux points de l’espace-temps $\mathbb{Z}^2$, de sorte qu’indépendemment de son point de départ, une marche aléatoire passant par ce point utilise la même variable aléatoire qui, conditionnellement à l’état de l’environnement en ce point, détermine entièrement son saut. Ceci garantit une propriété de coalescence très utile : deux marches aléatoires qui se rencontrent en un point de l’espace-temps ont ensuite les mêmes trajectoires pour toujours : si l’on désigne par Z^y la marche aléatoire partant de $y \in \mathbb{Z}^2$,

$$\forall y, y' \in \mathbb{Z}^2, \ \forall n, n' \in \mathbb{N}, \ Z^y_n = Z^{y'}_{n'} \implies \forall k \in \mathbb{N}, \ Z^y_{n+k} = Z^{y'}_{n'+k}. \tag{0.1}$$

De plus, le fait que les marches sautent aux plus proches voisins garantit que deux marches aléatoires vivant sur le réseau $\mathbb{L} = \{(x, n) \in \mathbb{Z}^2, x + n = 0[2]\}$ ne peuvent voir leurs trajectoires se croiser sans se rencontrer, et donc sans coalescer. Cela garantit une propriété de monotonie très forte :

$\forall y = (x, n_0), y' = (x', n_0) \in \mathbb{L}, x \leqslant x' \implies \forall n \in \mathbb{N}, X^y_{n_0+n} \leqslant X^{y'}_{n_0+n}$. (0.2)

Ce comportement permet de définir une notion de piège, dans un sens bien différent du sens usuel pour les MAMA, à savoir une région de l'espace où la marche a tendance à rester bloquée pendant longtemps.

Ici, on entend par piège une région de l'espace-temps dans laquelle toute marche aléatoire se voit "poussée vers la gauche" à cause de l'existence d'une marche aléatoire partant d'un point proche sur la droite qui a elle-même tendance à aller vers la gauche. Par aller vers la gauche, on entend en fait plus précisément aller à une vitesse bien inférieure à v_+.

Cette idée permet de démontrer que $v_- = v_+$ avec l'intuition suivante. Sachant que $v_- \leqslant v_+$, on raisonne par l'absurde et suppose que $v_- < v_+$. Par définition de v_- et v_+, la marche a tendance à avoir souvent une vitesse moyenne proche de v_- et de v_+. Quand elle est proche de v_-, elle doit donc par la suite aller suffisamment vite pour retrouver une vitesse proche de v_+. En la poussant vers la gauche grâce à la notion de piège, on montre que ce rattrapage n'est possible qu'avec une probabilité qui tend vers 0.

Le but de notre travail est de chercher à affaiblir les hypothèses de ce modèle.

Dans le premier modèle proposé, l'hypothèse de sauts aux plus proches voisins est levée, la marche est maintenant à portée finie $R \geqslant 1$ quelconque (autrement dit, $\mathbb{V} = \llbracket -R, R \rrbracket \times \{1\}$). Ainsi, la propriété de monotonie (0.2) ne tient plus. Cela dit, la propriété de coalescence (0.1) tient toujours. L'idée est alors de forcer le comportement monotone en utilisant de l'ellipticité uniforme : on suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

Pour P-presque tout ω, $\forall y \in \mathbb{Z}^2, \forall z \in \llbracket -R, R \rrbracket \times \{1\}, p(\omega_y, z) \geqslant \gamma$.

Fixons deux points $y = (x, n_0), y' = (x', n_0) \in \mathbb{L}$ avec $x \leqslant x'$ comme dans (0.2). Lorsque pour la première fois $|X^{y'}_n - X^y_{n+1}| < R$, il y a un risque que $X^y_{n+1} > X^{y'}_{n+1}$

$_{n+1}$. Mais heuristiquement, on sait qu'avec
2
probabilité au moins γ, on a X_y
$_{n+1} = X_y$
$_{n+1}$. Ainsi, en utilisant (0.1), on a retrouvé la monotonie avec
probabilité γ. En réalité, mettre en place rigoureusement cet argument pour que notre notion de piège
fonctionne bien est beaucoup plus subtil qu'il n'en a l'air, car la variable aléatoire qui dicte le saut auquel
on veut appliquer l'ellipticité uniforme n'est pas indépendante de l'existence du piège. Cela requiert
donc une analyse fine de la preuve de [BHT20] pour trouver où l'on a de la marge de manoeuvre pour
définir différemment la notion de piège, et un travail pour remplacer la propriété déterministe (0.2) par
un événement de probabilité positive.
Dans le deuxième modèle proposé, l'hypothèse du cadre dynamique est levée : on considère maintenant
des MAMA en milieu statique sur $\mathbb{Z}^2$. Par conséquent, nos marches aléatoires peuvent se contourner
l'une l'autre en utilisant la deuxième coordonnée, ce qui fait échouer (0.2). Néanmoins, nous ajoutons un
contrôle sur le comportement de cette deuxième coordonnée grâce à des hypothèses fortes de ballisticité
dans la direction verticale. De plus, la marche est supposée aux plus proches voisins, donc nous pouvons
imaginer qu'avec une bonne probabilité nous pouvons conserver le comportement monotone. Cela requiert
de définir un couplage adéquat, en prenant bien en compte le fait qu'à la différence du modèle dynamique,
ici une marche aléatoire peut visiter plusieurs fois un même point de $\mathbb{Z}^2$, et on ne peut donc pas définir
une seule variable pour l'aléa du saut en ce point. On définit en fait une suite de variables $(U(y, i))_{i \in \mathbb{N}^*}$
pour chaque point $y \in \mathbb{Z}^2$, de sorte qu'une marche aléatoire visitant y pour la i^e fois utilise $U(y, i)$ comme
aléa pour son saut. Le comportement des trajectoires est alors éminemment plus subtil : par exemple,
deux marches aléatoires peuvent se suivre pendant un temps, puis se séparer sur un sommet que l'une

d'elles a déjà visité dans le passé et l'autre non. Finalement, ce modèle présente donc deux difficultés supplémentaires : l'une consistant à toujours contrôler la deuxième coordonnée de la marche de sorte que les arguments du modèle dynamique s'adaptent bien, l'autre consistant à étudier finement l'interaction des trajectoires avec ce couplage. Ce que ces techniques permettent de montrer n'est pas encore tout à fait une loi des grands nombres, car ici l'information sur le temps est perdue, mais l'existence d'une direction asymptotique, qui nous informe sur le lien entre les deux coordonnées spatiales de la marche aléatoire en temps long.

Dans le troisème modèle proposé, on étudie des MAMA dynamiques à portée finie sur $\mathbb{Z}^d$. Il n'y a plus d'hypothèse sur d, donc il y a peu d'espoir de recycler les arguments sur les trajectoires des modèles précédents. En fait, les interactions entre les marches aléatoires ne seront pas au coeur de la preuve ici. Néanmoins, les idées de renormalisation et de pièges seront essentielles, bien que la définition de piège soit ici bien différente. La preuve repose sur une méthode développée dans [SZ99], [Szn00], [Szn01] et [Zer02], inspirée de [Kes77]. Dans ces articles, des lois des grands nombres et théorèmes central limite sont démontrés pour des MAMA ballistiques dans $\mathbb{Z}^d$ lorsque le milieu est i.i.d. L'idée est de découper la marche aléatoire en plusieurs morceaux en utilisant une suite de temps aléatoires $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ appelés temps de renouvellement, tels que conditionnellement à $T_1 < \infty$, les variables aléatoires $(Z_{T_{k+1}} - Z_{T_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (avec $T_0 = 0$) sont i.i.d. Cela permet de conclure en utilisant un contrôle sur les moments de Z_{T_1}, conséquence des hypothèses de ballisticité. Dans notre modèle cependant, le milieu n'est pas supposé i.i.d. L'idée est de supposer l'existence d'un processus auxiliaire $\eta = (\eta_y)_{y\in\mathbb{Z}^{d+1}}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$, pour lequel $\eta_y = 1$ signifie grosso modo que le passé et le futur d'une marche aléatoire passant en y sont indépendants. On définit alors une suite de temps de renouvellement $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ en considérant les temps successifs où la marche passe par un point où η vaut 1, et on montre que $(Z_{T_{k+1}} - Z_{T_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont i.i.d. Encore faut-il pouvoir contrôler les moments de T_1. Pour cela, on fait une hypothèse de mélange polynomial pour le processus η lui-même dans la direction temporelle. On retombe alors sur les méthodes de renormalisation et de pièges développés dans les autres modèles. Selon le contrôle obtenu sur la queue de T_1, qui dépend de l'exposant du mélange polynomial de η, on peut obtenir une loi des grands nombres et un théorème central limite.

Pour chaque modèle, des exemples d'environnements sont donnés en utilisant des processus classiques.

References

[BHT20] Oriane Blondel, Marcelo R. Hilário, and Augusto Teixeira. Random walks on dynamical random environments with nonuniform mixing. *The Annals of Probability*, 48(4):2014 – 2051, 2020.

[Che67] A.A. Chernov. Replication of a multicomponent chain by the "lightning" mechanism. *Biophysics*, 12:336–341, 01 1967.

[CM07] S. Cocco and R. Monasson. Reconstructing a random potential from its random walks. *Europhysics Letters*, 81(2):20002, dec 2007.

[Hug96] Barry D Hughes. *Random Walks and Random Environments*. Oxford University Press, 06 1996.

[Kes77] Harry Kesten. A renewal theorem for random walk in a random environment. In *Proc. Sympos. Pure Math*, volume 31, pages 67–77, 1977.

[LDMF99] Pierre Le Doussal, Cécile Monthus, and Daniel S. Fisher. Random walkers in one-dimensional random environments: Exact renormalization group analysis. *Phys. Rev. E*, 59:4795–4840, May 1999.

[Sol75] Fred Solomon. Random Walks in a Random Environment. *The Annals of Probability*, 3(1):1 – 31, 1975.

[SZ99] Alain-Sol Sznitman and Martin Zerner. A law of large numbers for random walks in random environment. *The Annals of Probability*, 27(4):1851–1869, 1999.

[Szn00] Alain-sol Sznitman. Slowdown estimates and central limit theorem for random walks in random environment. *Journal of the European Mathematical Society*, 2, 04 2000.

[Szn01] Alain-Sol Sznitman. On a class of transient random walks in random environment. *The Annals of Probability*, 29(2):724 – 765, 2001.

[Tem72] D. E. Temkin. One-dimensional random walks in a two-component chain. *Sov. Math., Dokl.*, 13:1172–1176, 1972.

[Zer02] Martin Zerner. A Non-Ballistic Law of Large Numbers for Random Walks in I.I.D. Random Environment. *Electronic Communications in Probability*, 7:191 – 197, 2002.