DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT

(Arrêté du 25 mai 2016)

Date de la soutenance : **26 juin 2025**

Nom de famille et prénom de l'auteur. e : **Monsieur Guillaume DUMAS**

Titre de la thèse **:** Quelques propriétés de rigidité des groupes semi-simples : régularité de coefficients matriciels et rigidité de quasi-homomorphismes

Résumé

Ce manuscrit présente les travaux réalisés au cours de ma thèse sur certaines propriétés des groupes de Lie semi-simples. Il est divisé en deux parties indépendantes. Dans la première partie, nous étudions la régularité des coefficients K-finis des représentations unitaires d'un groupe de Lie G pour diverses paires (G,K). La question principale que nous cherchons à résoudre est la suivante : quel est le plus grand alpha >= 0 pour lequel tout coefficient K-fini est localement alpha-Hölderien ? Bien qu'il n'y ait a priori aucune raison pour que alpha soit différent de 0, Lafforgue a observé dans ses travaux sur la propriété (T) renforcée, que pour la paire (SO(3),SO(2)), la réponse est au moins 1/2. Dans le premier chapitre, nous expliquons comment ramener la question originale à de l'analyse harmonique sur les fonctions sphériques des paires de Gelfand. Le deuxième chapitre traite des paires (G,K) où G est compact et G/K est un espace symétrique de type compact. Nous donnons une réponse complète lorsque G=KxK ou lorsque G/K est de rang 1. Nous conjecturons également ce qui se passe en rang supérieur. Dans le troisième chapitre, nous considérons le cas des groupes non compacts : nous étudions les paires (G,K) où G est un groupe de Lie semi-simple de centre fini et K un sous-groupe compact maximal, ainsi que les paires (H,K) où H est le groupe de Cartan associé à G. Dans le dernier chapitre de cette partie, nous donnons une réponse partielle à notre conjecture sur les paires compactes en utilisant des techniques de phase stationnaire développées dans le cas non compact. La seconde partie est consacrée à l'étude de la propriété (TTT), un renforcement de la propriété (T) introduit par Ozawa. Une application mesurable localement bornée b de G dans un espace de Hilbert est un wq-cocycle s'il existe une application mesurable p:G->U(H) tel que le défaut b(gh)-b(g)-p(g)b(h) est borné sur GxG. Un groupe G a la propriété (TTT) si tout wq-cocycle est borné. Il s'agit d'une généralisation forte de la propriété de point fixe pour les actions affines isométriques sur des espaces de Hilbert. La propriété (TTT) pour un groupe G entraîne des résultats de rigidité forts pour les quasi-homomorphismes G->G'. Par exemple, lorsque G' est hyperbolique, l'image d'un tel quasi-homomorphisme (continu) est relativement compacte. Dans le cinquième chapitre, nous prouvons que les réseaux héritent de cette propriété et que les réseaux dans les groupes algébriques simples de rang supérieur sur un corps local ont la propriété (TTT), ce qui n'était connu auparavant que pour

SLn. Dans le dernier chapitre, nous introduisons la propriété (FFF_E), qui est définie comme la bornitude des wq-cocycles lorsque l'espace de Hilbert est remplacé par un espace de Banach E. Nous définissons également une propriété légèrement plus faible, la propriété (T_{Q,E}), qui concerne les vecteurs presque invariants. Sous certaines conditions d'intégrabilité, nous montrons que les réseaux héritent aussi de ces propriétés. Enfin, nous étudions ces propriétés dans le cas des espaces de Banach super-réflexifs. Nous nous intéressons en particulier à la classe [H] des espaces de Banach admettant une norme hilbertienne compatible, dans le cas des groupes algébriques simples de rang supérieur sur un corps local.

Mots-clés : Groupes semi-simples,Représentations unitaires,Quasi-homomorphismes,Propriété (T),Propriétés de point fixe