

## DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT

(Arrêté du 25 mai 2016)

Date de la soutenance : **03 juillet 2025**

Nom de famille et prénom de l'auteur. e : **Monsieur Thibault CAILLET**

Titre de la thèse : Le Schéma JKO en diffusion linéaire et non linéaire : nouvelles estimations et convergence

### Résumé



Cette thèse porte sur l'étude du schéma JKO, de ses nombreuses généralisations et de ses applications en théorie des équations aux dérivées partielles. En effet, le schéma JKO est utilisé pour approximer, en temps, les solutions d'équations aux dérivées partielles diffusives, linéaires et non linéaires, à l'aide d'outils issus du transport optimal. Cependant, des travaux récents ont révélé que ce schéma possède en lui-même des propriétés remarquables. En particulier, dans les cas linéaires, il préserve de nombreuses estimations valables pour l'équation continue. Cet aspect est non seulement crucial pour établir la convergence du schéma, mais il pourrait également permettre d'obtenir des estimations pour des équations continues plus complexes. L'objectif de cette thèse est d'explorer ces estimations dans des contextes non linéaires, en généralisant les résultats connus dans le cas linéaire, ainsi que d'étendre les résultats de convergence du schéma à des cadres non linéaires plus généraux. Le manuscrit débute par une introduction au transport optimal et au schéma JKO, rassemblant des résultats classiques et plus récents qui serviront de fondement à la suite du travail. Ensuite, une inégalité connue sous le nom de "l'inégalité des cinq gradients" est introduite et démontrée dans un cadre très général. Cette inégalité joue un rôle clé dans l'obtention d'estimations sur le schéma ; en particulier, on en donne une application à la décroissance des normes BV. Le chapitre suivant est consacré à l'étude de la convergence du schéma dans le cas où le coût est de la forme  $\zeta(x,y)=|x-y|^p$ , et où les énergies considérées ne sont pas supposées convexes dans la géométrie sous-jacente au problème. Là encore, les propriétés du schéma sont exploitées pour obtenir des estimations sur l'équation limite, qui est ici fortement non linéaire, et dont certaines ne sont pas évidentes à établir directement dans le cadre continu. Par la suite, l'inégalité des cinq gradients est utilisée pour exhiber une large classe de quantités qui décroissent à chaque itération du schéma JKO, et donc également le long du flot de l'équation continue. On montre de plus que les modules de continuité en espace sont préservés aussi bien dans le schéma discret qu'à la limite, dans le cas continu. Enfin, dans une dernière partie, on exploite le schéma JKO pour établir des inégalités fonctionnelles. Plus précisément, on montre que la technique de Bakry-Émery, appliquée à certaines équations aux dérivées partielles, peut être adaptée au cadre discret du schéma JKO, permettant

ainsi de retrouver des inégalités fonctionnelles similaires. Cette approche présente l'avantage de simplifier la justification des calculs, qui s'avère souvent plus délicate dans le cas continu.

**Mots-clés :** Transport Optimal, Schéma JKO, EDP doublement non linéaire, Flot de Gradient