Université Claude Bernard Lyon 1

DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT

(Arrêté du 25 mai 2016)

Date de la soutenance : **07 juillet 2025**

Nom de famille et prénom de l'auteur. e : **Monsieur Eduardo MONTEIRO MENDONCA**

Titre de la thèse **:** g-modules de type fini sur U(h) et familles cohérentes.

Résumé

Cette thèse étudie la relation entre deux catégories de représentations d'une algèbre de Lie simple de dimension finie g : la catégorie $admW$ des modules de poids admissibles, constituée de g-modules sur lesquels une sous-algèbre de Cartan fixe $h subseteqg$ agit semi-simplement avec des espaces de poids de dimension uniformément bornée ; et la catégorie $frkA$ des g-modules $U(h)$-finis, constituée de modules de type fini sur $U(h)$, l'algèbre enveloppante universelle de h. Nous établissons que les objets des deux catégories $admW$ et $frkA$ ont une dimension de Gelfand-Kirillov bornée par le rang de g. En conséquence, nous prouvons que $frkA$ partage plusieurs propriétés structurelles avec $admW$, telles que la longueur finie de ses objets, une décomposition en blocs correspondant aux caractères centraux généralisés, et l'existence d'objets de dimension infinie uniquement lorsque g est de type A ou C. Le foncteur de pondération W, qui associe à un module $U(h)$-fini un module de poids admissible, fournit un autre lien entre ces catégories. En étudiant W et ses foncteurs dérivés à gauche, nous transférons des propriétés des modules de poids admissibles simples à $frkA$. En particulier, nous prouvons que les modules $U(h)$-finis simples de dimension infinie sont sans torsion sur $U(h)$ et localement libres en tout idéal maximal de $U(h)$, sauf pour un nombre fini d'entre eux. Nous introduisons la notion de presque équivalence pour les modules de poids et montrons que, si $M in frkA$ est simple de dimension infinie, alors $W(M)$ est presque équivalent à un nombre fini de copies, appelé la multiplicité-cohérente, d'une unique famille cohérente semi-simple irréductible — une classe de modules introduite et classifiée par Mathieu. En utilisant ce cadre, nous classifions les modules $U(h)$-finis simples de cohérente-multiplicité un, à l'exception de ceux ayant un caractère central régulier lorsque $g = mathfrak{sl}(n+1)$ pour $n geq 3$. Enfin, pour chaque entier positif m, nous construisons une famille de $mathfrak{sl}(n+1)$-modules simples de multiplicité-cohérente m. De plus, nous montrons que tout module $U(h)$-fini avec une multiplicité-cohérente supérieure à un ne peut pas être un module de poids par rapport à aucune sous-algèbre de Cartan $h'subseteqg$.

Mots-clés : modules U(h)-finis,modules U(h)-libres,modules de poids admissibles,familles cohérentes,foncteurs de pondération