

DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT

(Arrêté du 25 mai 2016)

Date de la soutenance : **16 juillet 2025**

Nom de famille et prénom de l'auteur. e : **Monsieur Antoine DETAILLE**

Titre de la thèse : Espaces de Sobolev à valeurs variétés

Résumé



Cette thèse s'intéresse à certaines propriétés des espaces de Sobolev d'applications entre variétés. Ces espaces ont fait l'objet d'une recherche intensive depuis le début des années 1980, notamment motivée par leur forte connection avec des problèmes issus de la géométrie, de la physique, ou encore du calcul numérique. Bien que naturellement définis comme des sous-espaces métriques d'espaces de Sobolev classiques de fonctions à valeurs vectorielles, les espaces de fonctions à valeurs dans une variété exhibent des différences qualitatives frappantes avec ces derniers. Un exemple typique d'une telle situation est le fait que les applications lisses à valeurs dans une variété donnée ne sont pas nécessairement denses parmi les applications de Sobolev à valeurs dans la même cible, en contraste flagrant avec le résultat de densité classique dans les espaces de fonctions à valeurs réelles. Suite à cette observation, un pan de recherche entier s'ouvrit, se focalisant notamment sur les quatre questions suivantes: (i) caractériser les valeurs des paramètres s et p , les domaines, et les cibles pour lesquels il y a densité des applications lisses; (ii) trouver une classe convenable d'applications presque lisses qui est toujours dense parmi les applications de Sobolev à valeurs dans une variété; (iii) lorsque la densité forte échoue, caractériser la clôture des applications lisses; et (iv) étudier ce qu'il advient lorsqu'on considère une notion plus faible de convergence. Cette thèse a pour but de présenter une contribution à l'étude de chacune de ces questions. Dans un premier temps, on résout le cas manquant $s > 1$ non entier des deux premières questions, où la difficulté principale est la combinaison de la rigidité des espaces d'ordre supérieur et du caractère non local propre à l'ordre fractionnaire, finalisant ainsi la réponse complète au problème de la densité forte. Par ailleurs, on pousse plus avant l'étude de la deuxième question en établissant la densité forte d'une classe améliorée d'applications presque lisses. Ensuite, on construit deux familles d'obstructions analytiques à la propriété d'approximation faible, montrant que pour tout p dans $N \setminus \{0,1\}$ — le seul cas encore ouvert — il existe des cibles pour lesquelles la propriété d'approximation faible échoue. Enfin, on construit des invariants intégraux permettant de caractériser la clôture des fonctions lisses pour une grande famille de variétés cibles dans la gamme $0 < s < 1$, correspondant au cas où la construction même de tels invariants est une tâche délicate.

Mots-clés : Espaces de Sobolev, Applications entre variétés, Densité forte et faible, Obstructions analytiques et topologiques, Invariants analytiques et topologiques, Applications harmoniques