Université Claude Bernard Lyon 1

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Date de la soutenance : **11 janvier 2024**

Nom de famille et prénom de l'auteur : **Monsieur MATTE BON Nicolas**

Titre des travaux : *« Aspects dynamiques et géométriques des groupes infinis et leurs actions non-libres»*

Résumé

Mes recherches portent sur les aspects dynamiques des groupes infinis, ainsi que sur les aspects géométriques et analytiques qui y sont liés. Elle s'articule autour de trois axes principaux (sans s'y limiter).

La première direction est l'étude de la dynamique de Chabauty des groupes et ses applications. La plupart de mes travaux dans ce domaine font partie d'une collaboration à long terme avec Adrien Le Boudec, et comprennent également des collaborations avec lui et Pierre-Emmanuel Caprace et avec Todor Tsankov. Pour tout groupe discret ou localement compact, l'ensemble de ses sous-groupes est naturellement un espace compact, sur lequel le groupe agit par conjugaison. Cette action peut être vue comme un système dynamique (topologique) intrinsèquement attaché à tout groupe, qui porte des informations sur lui. Par exemple, ses points fixes sont simplement les sous-groupes normaux. Nous avons développé une étude systématique de cette action du point de vue de la dynamique topologique, qui fait apparaître deux généralisations naturelles des sous-groupes normaux : les sous-groupes confinés et les sous-groupes uniformément récurrents. Ceux-ci déterminent les stabilisateurs possibles des actions du groupe sur les espaces compacts. Nous avons fourni diverses classes de groupes pour lesquels ils peuvent être complètement compris, et montré qu'ils apparaissent dans divers autres contextes conduisant à des applications à des problèmes de nature différente : les représentations unitaires et les C*-algèbres associées, des phénomènes de rigidité pour les groupes d'homéomorphismes, l'étude de la croissance et d'autres propriétés géométriques des orbites d'actions de groupes, l'étude des actions hautement transitives de groupes.

Une deuxième direction est consacrée à l'étude des actions de groupe sur les manifolds de dimension 1 (à savoir le cercle et les intervalles réels), par homéomorphismes et difféomorphismes. La plupart de mes travaux dans ce domaine font partie de collaborations avec J. Brum, C. Rivas, et M. Triestino. Un rôle important dans ce sujet est joué par la régularité de l'action, à savoir que l'on peut considérer des actions qui sont simplement par homéomorphismes, ou par difféomorphismes d'une régularité donnée C^r. Diverses restrictions sont connues en haute régularité, mais nous nous intéressons surtout aux actions sur des intervalles réels en très basse régularité, c'est-à-dire continus ou de classe C^1. Par exemple, nous avons montré que toute action C^1 minimale fidèle d'un groupe résoluble de type fini sur un intervalle réel est conjuguée à une action par transformations affines sur la droite, et que pour une classe de groupes issus d'une action sur un intervalle (y compris le groupe de Thompson), l'action de définition naturelle est essentiellement l'unique action C^1. En fait, ces résultats découlent d'une compréhension globale des actions possibles par homéomorphismes de ces groupes, qui s'avèrent être beaucoup plus flexibles. Nous avons également introduit une nouvelle construction de groupes de type fini agissant sur la droite réelle, issus de la dynamique symbolique. Ces groupes satisfont à de nouveaux phénomènes pour les actions sur la ligne, liés à leurs propriétés de rigidité/flexibilité et à la structure des composantes connexes (ou connexes par arc) de l'espace des actions.

Une autre direction principale de ma recherche est l'étude de la moyennabilité des groupes et des propriétés analytiques et probabilistes associées, telles que la propriété de Liouville pour les marches aléatoires. C'était principalement le sujet de mon doctorat, et c'est aussi le sujet d'un travail récent. La moyennabilité est une propriété fondamentale des groupes formalisée par J. von Neumann ; un groupe est moyennable s'il est possible de définir sur lui une notion de masse invariante par son action. La propriété de Liouville, selon laquelle

toutes les fonctions harmoniques bornées sur les graphes de Cayley du groupe sont des constantes, implique la moyennabilité. Il existe des exemples de groupes qui sont "évidemment moyennables" (les groupes élémentaires moyennables) et "évidemment non aménageables" (les groupes contenant des sous-groupes libres), et de nombreux groupes appartiennent à l'une de ces deux classes. Lorsque ce n'est pas le cas, il peut être difficile de décider si un groupe donné est moyennable, et c'est une question ouverte dans de nombreux cas. Divers exemples pour lesquels la question est riche se présentent comme des groupes d'origine dynamique (c'est-à-dire des groupes associés à des systèmes dynamiques). Une classe de tels groupes provient de la dynamique complexe, à savoir les groupes de monodromie itérée de fonctions rationnelles post-critiquement finies sur la sphère de Riemann. Dans un travail récent avec V. Nekrashevych et T. Zheng, nous avons établi la propriété de Liouville (et donc la moyennabilité) pour les groupes de monodromie itérés de toute fonction rationnelle complexe post-critiquement finie dont l'ensemble de Julia n'est pas la sphère entière.