

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Date de la soutenance : **24 octobre 2024**

Nom de famille et prénom de l'auteur : **Monsieur RYVKIN Leonid**

Titre des travaux : « *Structures supérieures en géométrie différentielle* »



Résumé

Les structures algébriques homotopiques jouent un rôle de plus en plus important dans divers domaines des mathématiques et de la physique théorique. Elles ont été cruciales pour la preuve du théorème de formalité de Kontsevich et pour la preuve de la conjecture de Milnor par Voevodsky, et elles apparaissent comme des observables généralisées en physique mathématique. En général, chaque fois qu'on a une structure algébrique jusqu'à un terme d'ordre supérieur ou jusqu'à certaines "cohérences supérieures", les structures algébriques homotopiques sont les outils appropriés à utiliser. Le sujet de cette Habilitation est l'application des structures algébriques homotopiques dans le domaine de la géométrie différentielle et de la physique mathématique. La plupart des structures algébriques que nous rencontrerons dans ce travail sont des adaptations de la notion d'algèbre de Lie. D'une part, nous avons les *algèbres* L_∞ , qui peuvent être comprises comme des algèbres de Lie jusqu'à homotopie ou jusqu'à des cohérences supérieures. D'autre part, nous avons les *algèbroïdes de Lie*, qui se rapportent aux algèbres de Lie de manière similaire à la relation entre les faisceaux vectoriels et les espaces vectoriels. Les objets résultants de ces deux Généralisations sont appelés *algèbroïdes* L_∞ , également connus sous le nom de *NQ*-variétés ou *dg*-variétés. La thèse d'habilitation est cumulative et comprend huit articles et prépublications, qui peuvent être regroupés grossièrement comme suit:

Géométrie multisymplectique.

Mon premier domaine de recherche est la géométrie multisymplectique, une généralisation de la géométrie symplectique aux formes différentielles de degré supérieur, qui trouve des applications dans la théorie des champs classique, la dynamique des fluides, les équations aux dérivées partielles et la quantification géométrique.

Les articles **[1,2,3]** portent sur différentes notions de moments dans le contexte de la géométrie multisymplectique, c'est-à-dire la géométrie d'une variété munie d'une forme différentielle non dégénérée et fermée de degré arbitraire. Une variété multisymplectique porte une L_∞ -algèbre d'observables, et une application moment est une manière d'associer des éléments de cette algèbre à des symétries infinitésimales de la variété multisymplectique. Dans **[1]**, nous étudions l'existence des applications moment à homotopie près pour des actions sur des sphères, dans **[2]** nous relierons les applications moment faibles et homotopiques ainsi que leurs versions équivariantes, et dans **[3]** nous exploitons les applications moment covariants pour réduire les L_∞ -algèbres d'observables des variétés multisymplectiques de manière algébrique.

Dans le cas d'une forme symplectique (c'est-à-dire une 2-forme fermée non dégénérée), la L_∞ -algèbre est simplement une algèbre de Lie, de sorte que les phénomènes algébriques homotopiques

n'apparaissent généralement pas. Cependant, dans [4], nous avons découvert que les L_∞ -algèbres apparaissent également en géométrie symplectique classique, lorsqu'on considère les extensions centrales de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens.

Feuilletages singuliers

Un feuilletage singulier F (au sens d'Andoulidakis et Skandalis) sur une variété M est un $C^\infty(M)$ - sous-module localement finiment engendré et involutif de $X_c(M)$. Les ensembles de points qui peuvent être reliés par des courbes intégrales associées à des éléments de F forment des sous-variétés, appelées les feuilles de F . Des exemples importants de feuillets singuliers sont donnés par les orbites des actions de groupes de Lie ou par les feuilles symplectiques des variétés de Poisson. Comprendre la géométrie et la dynamique des feuillets singuliers est très important : par exemple, dans [5], nous avons prouvé que l'obstruction à reformuler la dynamique sur une variété de Poisson de manière variationnelle réside dans sa cohomologie horizontale, qui peut être, par exemple, localement non triviale uniquement pour les feuilles singulières de son feuilletage sous-jacent.

Dans [6], nous avons développé la notion d'holonomie supérieure pour les feuillets singuliers et montré que les applications d'holonomie s'inscrivent dans une suite exacte de groupes d'homotopie, en décrivant le rapport des structures longitudinales et transversales d'un feuilletage singulier. Pour ce faire, nous avons étudié les structures de L_∞ -algèbre sur les résolutions géométriques d'un feuilletage singulier. Ces structures de L_∞ -algèbre satisfont certaines conditions linéaires et de dérivation supplémentaires, qui les transforment en algèbroïdes L_∞ . Ainsi, pour étudier les holonomies des feuillets singuliers, nous avons prouvé l'exactitude de la suite exacte longue en homotopie pour les fibrations d'algèbroïdes L_∞ , unifiant et généralisant plusieurs résultats sur les algèbroïdes de Lie et les L_∞ -algèbres dans la littérature.

Un feuilletage F est appelé *localement réel analytique* si, dans le voisinage de tout point, il est équivalent à un feuilletage singulier engendré par des champs réelles-analytiques. Cette classe de feuillets est assez générale et possède de nombreuses propriétés souhaitables. Dans [7], nous avons montré que pour des feuillets localement réels analytiques, le noyau de la linéarisation de l'algèbroïde de Lie d'holonomie est nilpotent. De plus, nous avons prouvé que si un tel feuilletage est préservé par un champ de vecteurs transversal de type Euler, alors localement il admet des générateurs polynomiaux homogènes.

Dans le même article, nous avons démontré des théorèmes de forme normale pour les feuillets singuliers près d'une feuille singulière. Notre théorème central affirme qu'à proximité d'une feuille 2-connexe, un feuilletage singulier est formellement isomorphe au produit semi-direct de l'algèbroïde de Lie d'holonomie semi-simple de la feuille sur un feuilletage radical R . Cela peut être vu comme une sorte de théorème de type Levi-Malcev : il affirme qu'une certaine algèbre de Lie de dimension infinie est isomorphe à un produit semi-direct de son radical et de son quotient semi-simple. Pour les feuilles de dimension zéro, ce théorème retrouve les résultats de Dominique Cerveau et pour les feuillets singuliers projectifs, il a des relations étroites avec les résultats de Alan Weinstein sur les algèbroïdes de Lie. En particulier, nos résultats impliquent que près d'une feuille simplement connexe, transversalement quadratique, un feuilletage est toujours formellement isomorphe à un feuilletage en produit direct.

Théorie de Lie supérieure

Les groupoïdes supérieurs (∞ -groupoïdes ou n -groupoïdes) sont un outil important pour décrire et comprendre les symétries (et asymétries) des objets géométriques. L'exemple le plus connu d'un ∞ -groupoïde supérieur est le ∞ -groupoïde des chemins $P(X)$ d'un espace topologique X . Ses objets sont simplement les points de X . L'équivalence entre deux points x et y est un chemin γ de x à y .

Contrairement au cas des groupes, deux équivalences γ, γ' ne sont composables que si le point final de γ est le point de départ de γ' . De plus, l'associativité et l'inversibilité ne sont valables qu'à homotopie près (ce qui devrait être interprété comme des équivalences d'équivalences).

Un ∞ -groupoïde de Lie (ou L_∞ -groupoïde) est un groupoïde supérieur, où les espaces d'objets et d'équivalences (et d'équivalences d'équivalences, etc.) sont des variétés différentielles et les applications de structure (compositions, inversions, etc.) sont lisses. Par analogie avec la correspondance classique entre les groupes de Lie et les algèbres de Lie, il devrait y avoir une correspondance (via l'intégration et la différentiation) entre les L_∞ -groupoïdes et les L_∞ -algèbroïdes.

Une approche fonctorielle à la différentiation des L_∞ -groupes utilisant des préfaisceaux et des variétés graduées a été proposée par Pavol Severa en 2006. Bien que conceptuellement très convaincante, cette approche ne fournissait pas de description explicite de la L_∞ -algèbre résultant et l'existence des objets introduits n'avait pas été prouvée. Plusieurs articles ont tenté de remédier à cela, mais malheureusement, toutes les preuves précédemment publiées présentaient une lacune sérieuse. Dans **[8]**, nous avons résolu ce problème, prouvant ainsi la conjecture centrale de Severa. Plus précisément, nous avons montré que pour un L_∞ -groupoïde X_\bullet et D_\bullet le nerf du groupoïde de paires de la droite impaire (de degré un) R^{0V1} , le foncteur de différentiation

$$\text{Hom}(\underline{D}_\bullet, X_\bullet): T \mapsto \text{hom}(T \times D_\bullet, X_\bullet)$$

est représentable dans la catégorie des L_∞ -algèbres. Notre approche pour résoudre le problème fournit également une construction géométrique de la L_∞ -algèbre représentant ce foncteur comme le complexe tangent de X_\bullet .